# Nombres complexes

**EL KYAL MOHAMED**

*L'ensemble des nombres complexes est :* $\mathbb{C} = \{ z = a + ib \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2 \}$ et $i^2 = -1$

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

## ➢ ***Définition et propriétés :***

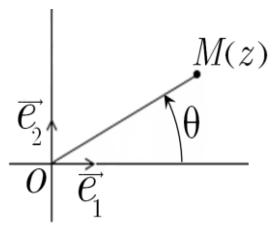
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- ***La forme algébrique*** du nombre complexe $z$ est : $a + ib$.
- ***La partie réelle*** du nombre complexe $z$ est : $Re(z) = a$.
- ***La partie imaginaire*** du nombre complexe $z$ est : $Im(z) = b$.
- Le nombre complexe $z$ est ***imaginaire pur*** si $Re(z) = 0$.
- ***Egalité*** de deux nombres complexes **:** $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$
- ***Le conjugué*** du nombre complexe $z$ est : $\overline{z} = a - ib$
- ***Le module*** du nombre complexe $z$ est : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ***L'image*** du nombre complexe $z = a + ib$ est le point $M(a,b)$, noté $M(z)$
- ***L'affixe*** du point $M(a,b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté $z_M$
- ***L'affixe*** du vecteur $\vec{u}(a,b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté $z_{\vec{u}}$
- ***L'affixe*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- ***L'argument*** du nombre complexe non nul $z$ est une mesure $\theta$ de l'angle orienté $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$

  noté $arg z$

  on a $arg\, z \equiv \theta [2\pi]$

  $$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad et \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$




- ***La forme trigonométrique*** du nombre complexe non nul $z$ est :

  $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$$

  avec $r = |z|$ et $arg\, z \equiv \theta [2\pi]$

  $[r, \theta]$ est une écriture réduite du nombre complexe $r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- ***La forme exponentielle*** du nombre complexe non nul $z$ est : $z = re^{i\theta}$

  avec $r = |z|$ et $arg\, z \equiv \theta [2\pi]$

- ***Propriétés:***

| | Conjugué | Module | Argument |
|---|---|---|---|
| Opposé | $\overline{-z} = -\overline{z}$ | $\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$ | $arg\ (-z) \equiv \pi + arg\, z\ [2\pi]$ |
| Conjugué | $\overline{\overline{z}} = z$ | $\lvert \overline{z} \rvert = \lvert z \rvert$ | $arg\ \overline{z} \equiv -arg\, z\,[2\pi]$ |
| Produit | $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ | $\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$ | $arg\ (zz') \equiv arg\, z + arg\, z'\ [2\pi]$ |
| Puissance | $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$ | $\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$ | $arg\ (z^n) \equiv n\, arg\, z\ [2\pi]$ |
| Inverse | $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ | $\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$ | $arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg\, z\,[2\pi]$ |
| Quotient | $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ | $\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$ | $arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg\, z - arg\, z'\ [2\pi]$ |
| Somme | $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ | | |

| | Forme trigonométrique | Forme exponentielle |
|---|---|---|
| Opposé | $-[r,\theta] = [r, \pi + \theta]$ | $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$ |
| Conjugué | $\overline{[r,\theta]} = [r, -\theta]$ | $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ |
| Produit | $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr'; \theta + \theta']$ | $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ |
| Puissance | $[r,\theta]^n = [r^n; n\theta]$ | $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{i\, n\theta}$ |
| Inverse | $\frac{1}{[r;\theta]} = \left[\frac{1}{r}; -\theta\right]$ | $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ |
| Quotient | $\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$ | $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ |

| | |
|---|---|
| • $z + \overline{z} = 2\, Re\ z$ <br> • $z - \overline{z} = 2\, Im\ z$ <br> • $z\overline{z} = [Re\ z]^2 + [Im\ z]^2$ <br> • $\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ <br> • $\forall k \in \mathbb{Z}\quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$ | • $z$ *est réel* $\Leftrightarrow \overline{z} = z$ <br> • $z$ *est réel* $\Leftrightarrow arg\, z = k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ <br> • $z$ *est imaginaire pur* $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$ <br> • $z$ *est imaginaire pur* $\Leftrightarrow arg\, z = \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ |

- **<u>*Formule de Moivre :*</u>**

$$cos\theta + i\,sin\theta^{\;n} = cos\;\; n\theta \;+ i\,sin\;\; n\theta$$

- **<u>*Formules d'Euler :*</u>**

$$cos\theta = \frac{1}{2}\;e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

$$sin\;\theta = \frac{1}{2i}\;e^{i\theta} - e^{-i\theta}$$

- **<u>*Equations du second degré à coefficients réels :*</u>**

| *L'équation :* | | *Ensemble de solution:* |
|---|---|---|
| $z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ <br> $\Delta = b^2 - 4ac$ | $\Delta > 0$ | $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ |
| | $\Delta = 0$ | $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$ |
| | $\Delta < 0$ | $S = \left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$ |

- **<u>*Nombres Complexes et géométrie:*</u>**

| *Notion complexe :* | *Relation géométrique :* |
|---|---|
| $\left\|z_B - z_A\right\|$ | *la distance AB* |
| $\left\|z - z_A\right\| = r \qquad r > 0$ | • $AM = r$ <br> • *M appartient au cercle de centre A et de rayon r* |
| $\left\|z - z_A\right\| = \left\|z - z_B\right\|$ | • $AM = BM$ <br> • *M appartient à la médiatrice de* $[AB]$ |
| $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ | *I milieu de* $[AB]$ |
| $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ | *A,B et C trois points alignés* |
| $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$ | *mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ |

- **Nature d'un triangle:**

| | Nature du triangle ABC |
|---|---|
| $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$ | ABC est un triangle rectangle en A |
| $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$ | ABC est un triangle isocèle en A |
| $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$ | ABC est un triangle isocèle et rectangle en A |
| $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\dfrac{\pi}{3}\right]$ | ABC est un triangle équilatéral |

- **Ecritures complexes des transformations du plan:**

| Transformations: | Ecriture complexe : |
|---|---|
| **Translation** de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$ | $z' = z + z_{\vec{u}}$ |
| **Homothétie** de centre $\Omega\ \omega$ et de rapport k | $z' - \omega = k\ z - \omega$ |
| **Rotation** de centre $\Omega\ \omega$ et d'angle $\theta$ | $z' - \omega = e^{i\theta}\ z - \omega$ |

- **Reconnaitre une translation, une homothétie ou une rotation à partir de leurs expressions complexes :**

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $o, \vec{e_1}, \vec{e_2}$

Soit $M'\ z'$ l'image d'un point $M\ z$ par une transformation $F$

<table>
<tr><th colspan="3">L'expression complexe du transformation F</th><th>Nature du transformation F</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$z' = az + b$<br>avec $a;b \in \mathbb{C}^2$<br>$(a \neq 0)$</td><td colspan="2">$a = 1$</td><td>F est une translation<br>de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a \neq 1$</td><td>$a \in \mathbb{R}^* - 1$</td><td>F est une homothétie<br>de rapport $a$<br>et de centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$<br>($\omega$ vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)</td></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{C}^* - 1$<br>avec $|a| = 1$</td><td>F est une rotation<br>d'angle : $\theta \equiv arg\, a\, [2\pi]$<br>et de centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$<br>($\omega$ vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)</td></tr>
</table>